

Suivre la lumière:

Rayons lumineux en physiques classique et relativiste

Julien Larena

Particules, Astroparticules, Cosmologie: Théorie
Laboratoire Univers et Particules de Montpellier
Université de Montpellier

11 juillet 2023
Festival d'Astronomie
Fleurance



Introduction

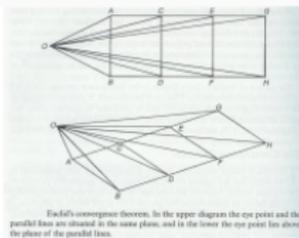
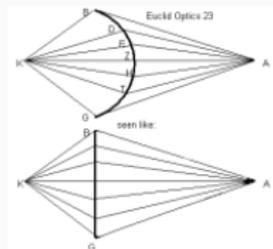
Électromagnétisme et optique géométrique

Optique géométrique en relativité générale

Introduction

Un peu d'histoire

- Rayon visuel depuis Pythagore (-580/-495) au moins: théorie d'**extramission**.
 - Démocrite (-460/-370): théorie de l'intramission; premier modèle de l'œil.
 - Aristote (-384/-322): théorie intermédiaire
 - Optique géométrique au moins depuis Euclide (~ -300):
- Lumière voyage en ligne droite.
 - Établit la loi de la réflexion.
 - Toujours extramission.

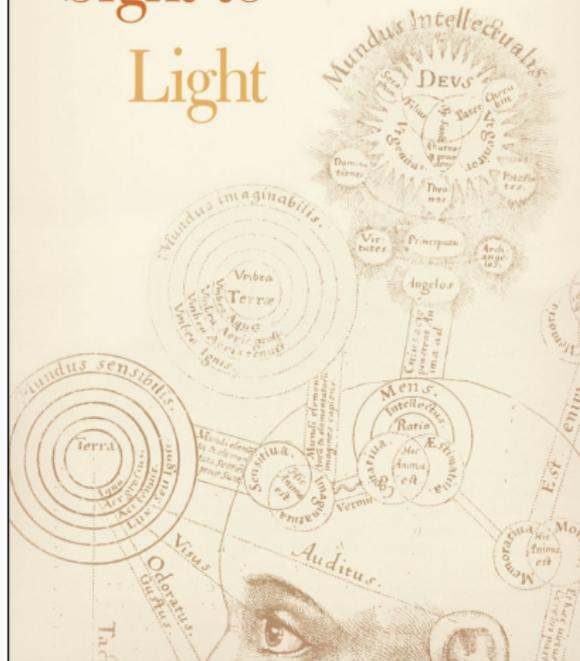


Un peu d'histoire

From Sight to Light

THE PASSAGE FROM ANCIENT
TO MODERN OPTICS

A. Mark Smith



Révolutions: la lumière est une onde



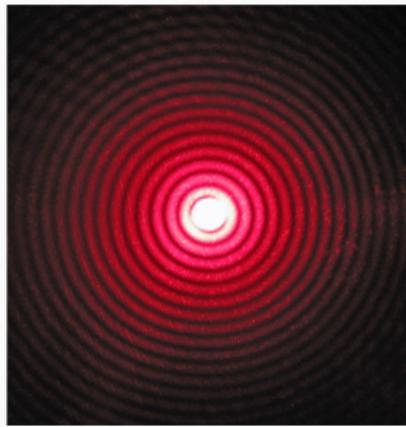
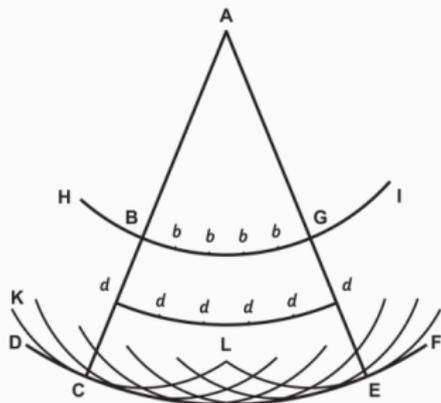
Huygens (1629-1695)



Fresnel (1788-1827)

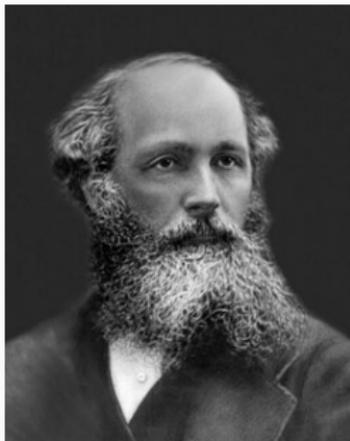


Young (1773-1829)



L'électromagnétisme

- Maxwell (1831-1879) unifie électricité, magnétisme et lumière.



- La lumière est une onde.
- Problème: Que sont les rayons lumineux et qu'est-ce que l'optique géométrique dans ce cadre?

Électromagnétisme et optique géométrique

Équations de Maxwell dans un milieu

Milieu isotrope:

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon(\vec{r})\vec{E}; \epsilon(\vec{r}) : \text{permittivité diélectrique} \\ \vec{H} = \mu^{-1}(\vec{r})\vec{B}; \mu(\vec{r}) : \text{perméabilité magnétique} \end{cases}$$

Transparent (pas de charge libre ni de courant):

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \end{cases}$$

Avec les contraintes:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \end{cases}$$

Équations de propagation

Identités remarquables:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge [f\vec{X}] = f\vec{\nabla} \wedge \vec{X} + \vec{\nabla}f \wedge \vec{X} \\ \vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \wedge \vec{X}] = \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{X}] - \Delta\vec{X} \\ \vec{\nabla} \cdot [f\vec{X}] = f\vec{\nabla} \cdot \vec{X} + \vec{X} \cdot \vec{\nabla}f \end{cases}$$

En combinant les équations de Maxwell:

- Séparation de \vec{E} et \vec{H} .
- Équations hyperboliques d'ordre 2.

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \ln \mu \wedge [\vec{\nabla} \wedge \vec{E}] + \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \ln \epsilon \cdot \vec{E}] = \vec{0} \\ \Delta\vec{H} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \ln \epsilon \wedge [\vec{\nabla} \wedge \vec{H}] + \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \ln \mu \cdot \vec{H}] = \vec{0} \end{cases}$$

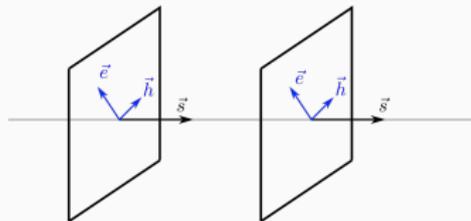
Équations de propagation

Pour un milieu homogène:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}$$

- indice de réfraction: $n = \sqrt{\mu\epsilon}$
- Vitesse de la lumière dans le milieu: $v = \frac{c}{n}$
- Solution onde plane:

$$\begin{cases} \vec{E} = e^{i[\frac{\omega}{c}n(\vec{s}\cdot\vec{r}) - \omega t]} \vec{e} \\ \vec{H} = e^{i[\frac{\omega}{c}n(\vec{s}\cdot\vec{r}) - \omega t]} \vec{h} \end{cases}$$



Approximation eikonale

- Milieu isotrope général: L distance typique de variation de ϵ et μ .
- Approx. des hautes fréquences: $\omega \gg 1/L$: Onde \sim plane localement.

$$\begin{cases} \vec{E} = e^{i[\frac{\omega}{c}S(\vec{r}) - \omega t]} \vec{e}(\vec{r}) = e^{-i\omega t} \vec{E}_0(\vec{r}) \\ \vec{H} = e^{i[\frac{\omega}{c}S(\vec{r}) - \omega t]} \vec{h}(\vec{r}) = e^{-i\omega t} \vec{H}_0(\vec{r}) \end{cases}$$

Approximation eikonale

Dans les équations de Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} S \wedge \vec{h} + \epsilon \vec{e} = - \frac{c}{i\omega} \vec{\nabla} \wedge \vec{h} \\ \vec{\nabla} S \wedge \vec{e} - \mu \vec{h} = - \frac{c}{i\omega} \vec{\nabla} \wedge \vec{e} \\ \vec{e} \cdot \vec{\nabla} S = - \frac{c}{i\omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{e} + \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \ln \epsilon \right) \\ \vec{h} \cdot \vec{\nabla} S = - \frac{c}{i\omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{h} + \vec{h} \cdot \vec{\nabla} \ln \mu \right) \end{array} \right.$$

Approximation eikonale

Donc:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}S \wedge \vec{h} + \epsilon \vec{e} = \vec{0} \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{\nabla}S = 0 \\ \vec{\nabla}S \wedge \vec{e} - \mu \vec{h} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h} \cdot \vec{\nabla}S = 0 \end{cases}$$

Système de 6 équations linéaires hom. à 6 inconnues:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}S \wedge \vec{h} + \epsilon \vec{e} = \vec{0} \\ \vec{\nabla}S \wedge \vec{e} - \mu \vec{h} = \vec{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ solution si
 $\det \mathbf{A} = 0$

Soit:

Équation eikonale: $\|\vec{\nabla}S\|^2 = n^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z)$$

Surfaces $S(x, y, z) = \text{cste}$ sont les **fronts d'onde géométriques**.

Caractérisation physique des fronts d'onde

- Énergie moyenne sur $T \gg \omega^{-1}$:

$$\langle w \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \frac{\mu}{16\pi} \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^*$$

- Conservation:

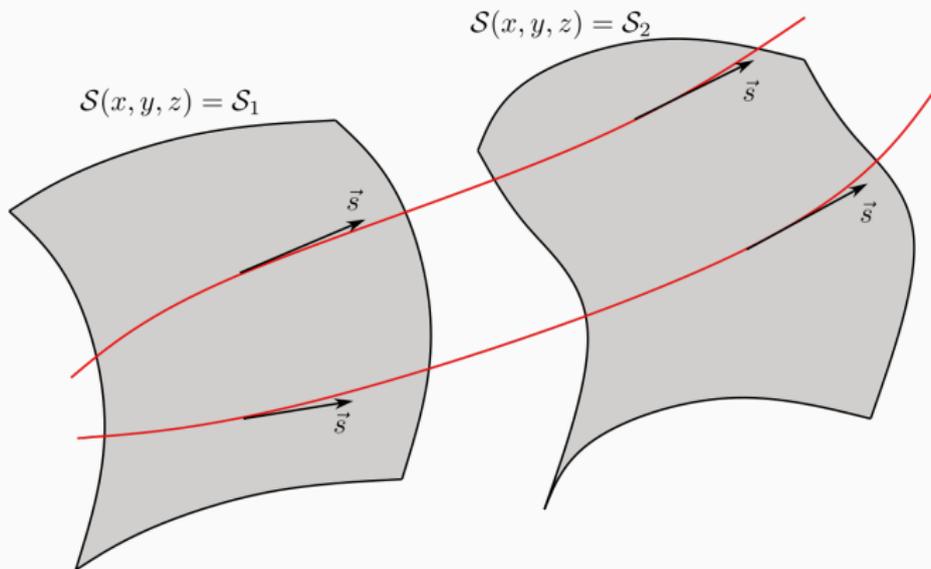
$$\frac{\partial \langle w \rangle}{\partial t} = 0 = -\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{P} \rangle$$

- Vecteur de Poynting (direction du flot d'énergie):

$$\begin{aligned} \langle \vec{P} \rangle &= \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle = \frac{c}{n} \langle w \rangle \frac{\vec{\nabla} S}{n} \\ &= v \langle w \rangle \vec{s} \end{aligned}$$

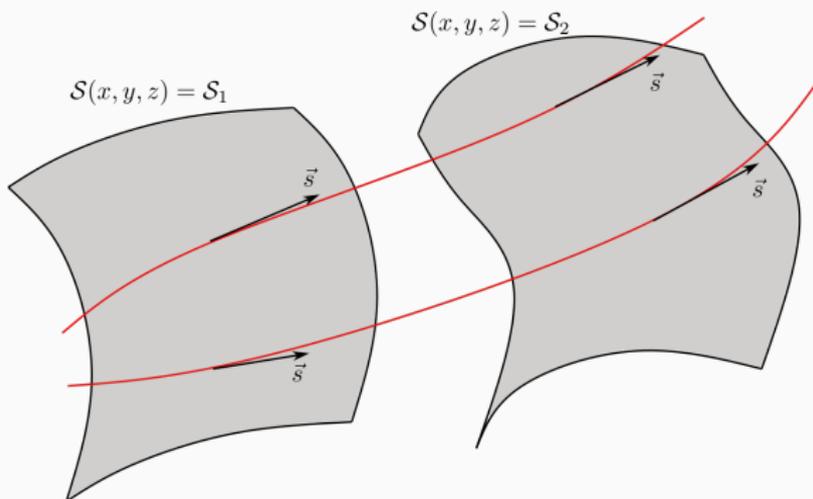
- Énergie moyenne se propage à la vitesse v le long des courbes partout tangentes à $\vec{s} = \vec{\nabla} S / n$

Rayons lumineux



- **Rayon lumineux:** Courbe orientée $(x(s), y(s), z(s))$ de vecteur tangent $\vec{s}[x(s), y(s), z(s)]$.
- Rayons partout \perp aux fronts d'onde

Rayons lumineux



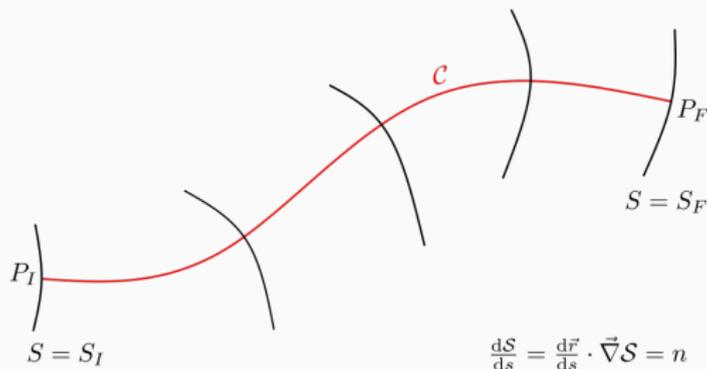
- Par construction:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{s}.$$

- Équation des rayons:

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla} S \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n$$

Chemin optique



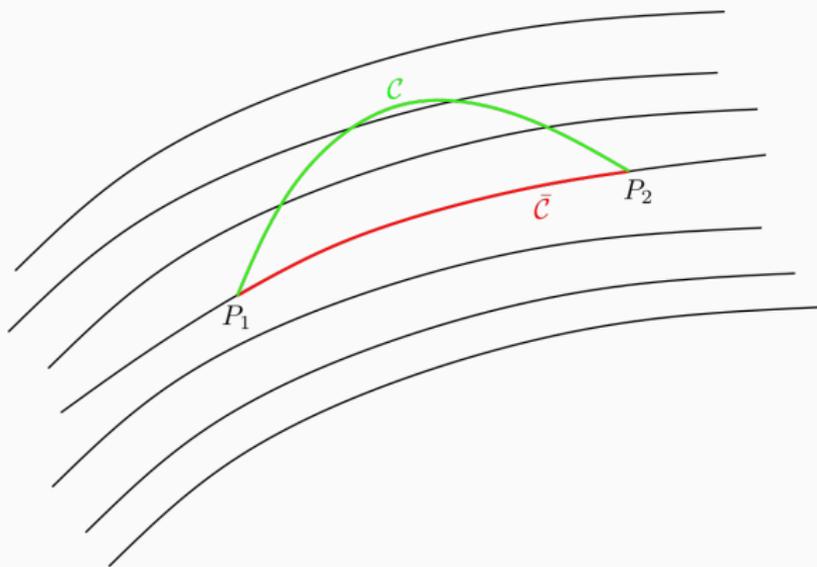
- Chemin optique:

$$\begin{aligned} [P_I P_F] &= \int_C n ds = S_F - S_I \\ &= c \int_C dt \quad \text{car } v = c/n = \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

- $\int_C dt$: temps mis par la lumière pour aller de P_1 à P_2 le long de C .

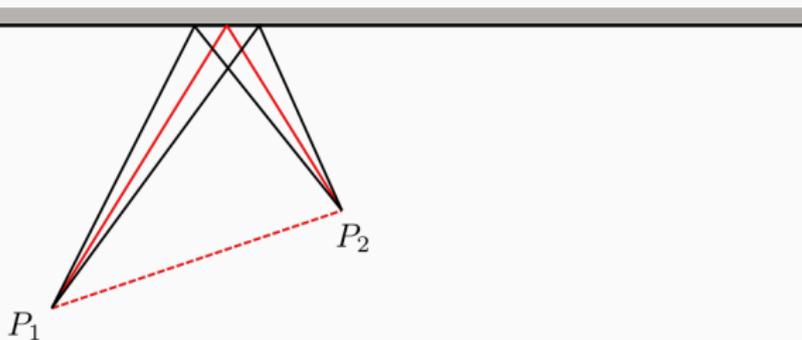
Principe de Fermat

Localement, le chemin optique d'un rayon lumineux joignant deux points P_1 et P_2 est minimal parmi ceux de toute courbe joignant ces mêmes points.



Principe de Fermat

- Localement crucial pour minimum:

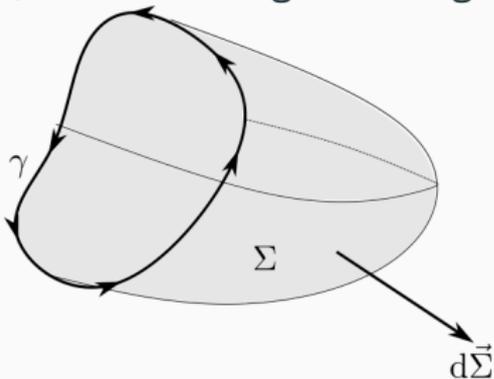


- Cas général: courbe stationnaire (formalisme hamiltonien).

Principe de Fermat: une preuve

- Étape 1: Lemme (Invariant intégral de Lagrange)

$$\forall \gamma, \oint_{\gamma} n\vec{s} \cdot d\vec{r} = 0$$



Corollaire:

L'intégrale de $n\vec{s}$
entre deux points
ne dépend pas du
chemin suivi.

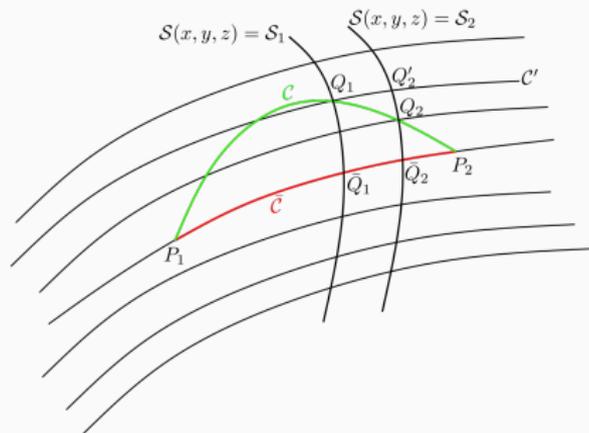
$$n\vec{s} = n \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla} S \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge (n\vec{s}) = \vec{0}$$

$$\oiint_{\Sigma} [\vec{\nabla} \wedge (n\vec{s})] \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Or (Théorème de Stokes)

$$\oiint_{\Sigma} [\vec{\nabla} \wedge (n\vec{s})] \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_{\gamma} n\vec{s} \cdot d\vec{r}$$

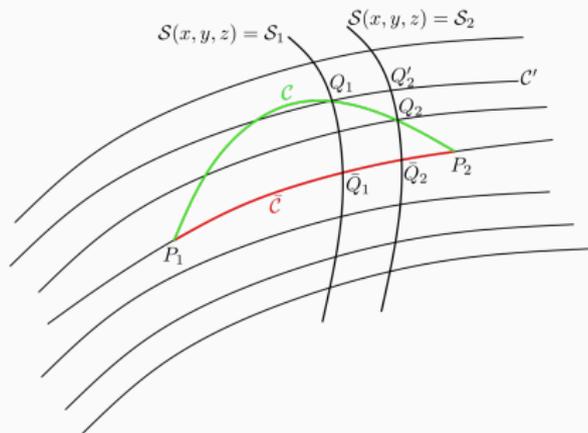
Principe de Fermat: une preuve



Dans triangle $Q_1Q_2Q'_2$ (Lemme):

$$\int_{Q_1}^{Q'_2} n\vec{s} \cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{Q'_2}^{Q_2} n\vec{s} \cdot d\vec{r}}_{=0 \text{ (m\^eme front)}} - \int_{Q_1}^{Q_2} n\vec{s} \cdot d\vec{r} = 0$$

Principe de Fermat: une preuve



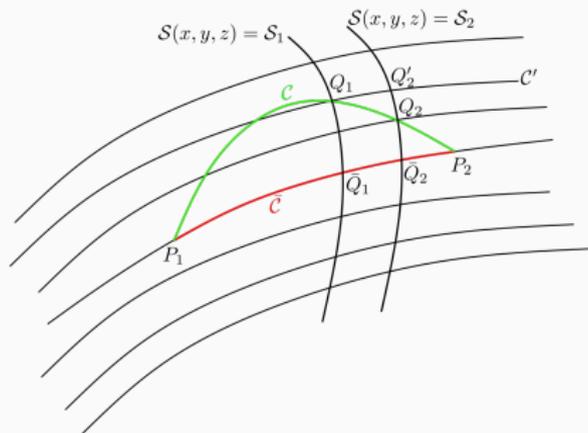
De plus:

$$\int_{Q_1}^{Q'_2} \vec{n} \cdot d\vec{r} = \int_{Q_1}^{Q_2} \vec{\nabla} S \cdot d\vec{r} = S_2 - S_1 = \int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_2} \vec{n} \cdot d\vec{r}$$

Donc:

$$\int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_2} \vec{n} \cdot d\vec{r} = \int_{Q_1}^{Q_2} \vec{n} \cdot d\vec{r}$$

Principe de Fermat: une preuve



Or (prop. du produit scalaire):

$$\int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_2} n\vec{s} \cdot d\vec{r} = \int_{Q_1}^{Q_2} n\vec{s} \cdot d\vec{r} \leq \int_{Q_1}^{Q_2} n dl$$

Donc, en sommant les petits intervalles:

$$\int_{\bar{c}} n ds \leq \int_c n dl$$

Une loi sur l'intensité

- Intensité:

$$I = \left| \langle \vec{P} \rangle \right| = v \langle w \rangle$$

- $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{P} \rangle = \vec{\nabla} \cdot [I\vec{S}] = 0$

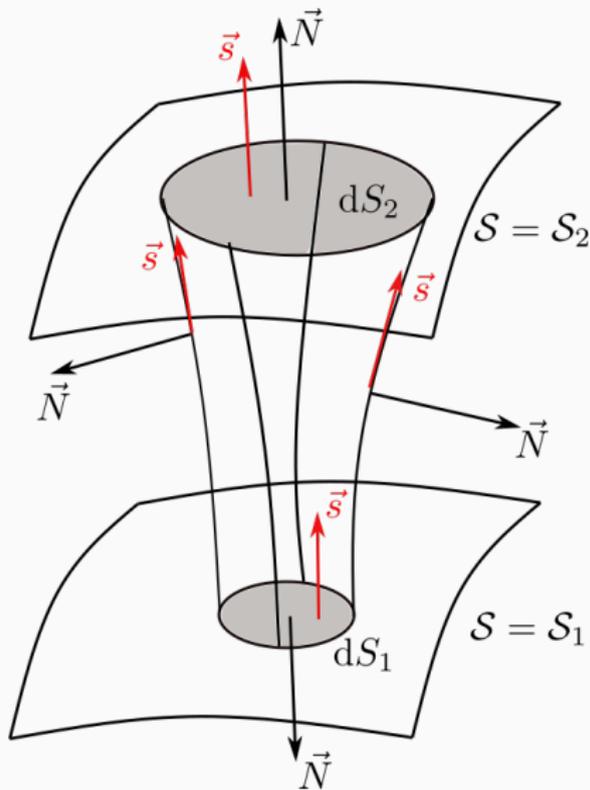
Donc

$$\int_{\mathcal{T}} \vec{\nabla} \cdot [I\vec{S}] dV = 0$$

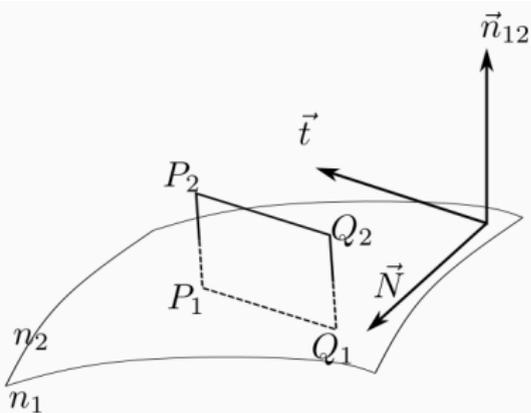
Et (Théo. de Green):

$$\int_{\partial\mathcal{T}} I\vec{S} \cdot \vec{N} dS = 0$$

D'où: $I_1 dS_1 = I_2 dS_2$



Application: lois de Snell-Descartes



$$P_1P_2 = Q_1Q_2 = \delta h \rightarrow 0$$

$$P_1Q_1 = P_2Q_2 = \delta l$$

$$\forall \delta l, -n_1 \delta l \vec{s}_1 \cdot \vec{t} + n_2 \delta l \vec{s}_2 \cdot \vec{t} + O(\delta h) = 0$$

$$\text{Note: } \vec{t} = \vec{N} \wedge \vec{n}_{12}.$$

$$n_2 \vec{s}_2 \cdot (\vec{N} \wedge \vec{n}_{12}) - n_1 \vec{s}_1 \cdot (\vec{N} \wedge \vec{n}_{12}) = 0$$

$$n_2 \vec{N} \cdot (\vec{n}_{12} \wedge \vec{s}_2) - n_1 \vec{N} \cdot (\vec{n}_{12} \wedge \vec{s}_1) = 0$$

$$\forall \vec{N}, \vec{N} \cdot [\vec{n}_{12} \wedge (n_2 \vec{s}_2 - n_1 \vec{s}_1)]$$

Finalemment:

$$n_2 \vec{n}_{12} \wedge \vec{s}_2 = n_1 \vec{n}_{12} \wedge \vec{s}_1$$

$$\vec{\nabla} \wedge (n\vec{s}) = 0$$

$$\int_{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \wedge (n\vec{s}) \cdot \vec{N} dS = \int_{\partial \mathcal{R}} n\vec{s} \cdot d\vec{r} = 0$$

Application: lois de Snell-Descartes

$$n_2 \vec{n}_{12} \wedge \vec{s}_2 = n_1 \vec{n}_{12} \wedge \vec{s}_1$$

- \vec{s}_2 dans le plan de \vec{n}_{12} et \vec{s}_1 .

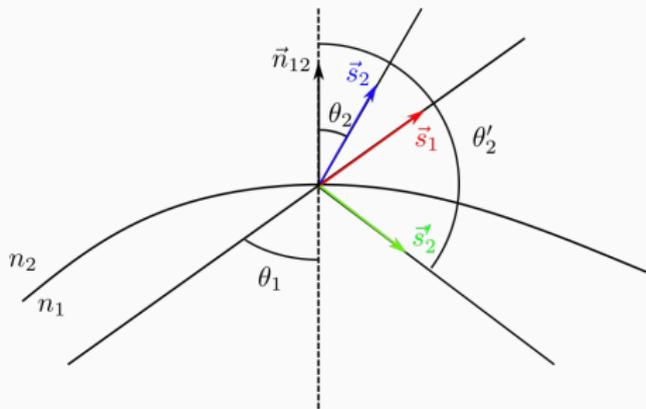
Directement:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

(Réfraction)

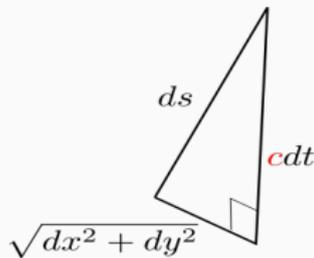
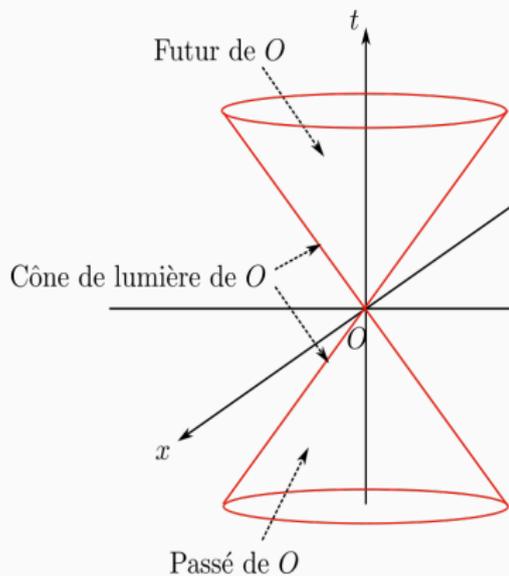
Pour la réflexion: $n_2 = n_1$,
donc:

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_2 \Rightarrow \theta'_2 = \pi - \theta_1$$



Optique géométrique en relativité générale

Géométrie de la relativité restreinte



$$ds^2 = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

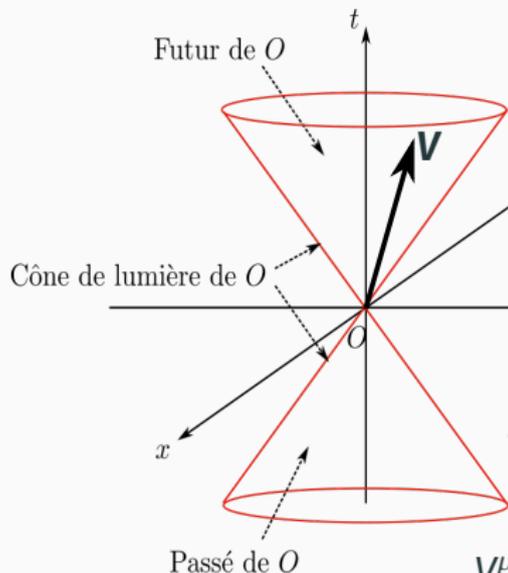
$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

Désormais: $c = 1$

Géométrie de la relativité restreinte

$$\text{Vector: } \mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_{(\mu)}$$

$$\text{Covector: } \mathbf{V}^* = \eta(\mathbf{V}, \cdot) = V_\mu \boldsymbol{\omega}^{(\mu)}$$



$$\text{Avec: } V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$$

Produit "scalaire":

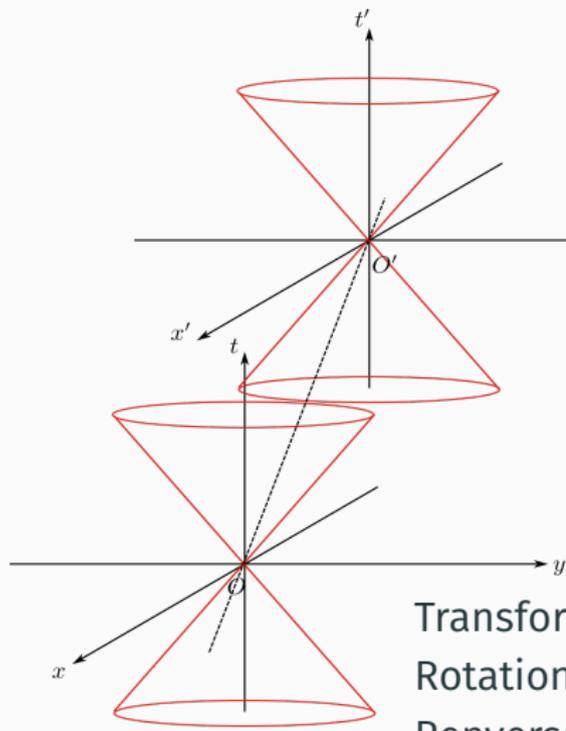
$$\eta(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V^\mu W_\mu$$

$$V^\mu V_\mu < 0: \text{ genre temps}$$

$$V^\mu V_\mu = 0: \text{ genre lumière}$$

$$V^\mu V_\mu > 0: \text{ genre espace}$$

Invariance et repères inertiels



$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Invariance relativiste:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}$$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu}$$

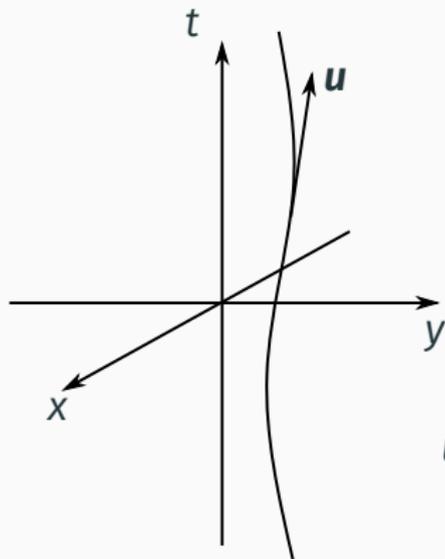
Transformations de Poincaré et Lorentz:

Rotations

Renversement du temps

Translation rectilignes et uniformes

Trajectoire



Temps propre de la particule: τ

$$4\text{-vitesse: } u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$u_\mu u^\mu = -1$$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} = u^0 v^i$$

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (1, v^i)$$

4-impulsion: $p^\mu = m u^\mu$

$$p^0 = E \text{ et } p^i = m u^i$$

$$p^\mu p_\mu = -m^2 \Rightarrow E^2 = m^2 + \|\vec{p}\|^2$$

Champ électromagnétique en relativité restreinte

- Force de Lorentz classique:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

- En relat. rest., seul temps propre compte:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= u^0 \frac{d\vec{p}}{dt} = e \left(u^0 \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \right) \end{aligned}$$

- De même:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = u^0 \frac{dE}{dt} = e \vec{E} \cdot \vec{u}$$

- Donc, conjecture: Il existe une matrice $\mathbf{F} [\vec{E}, \vec{B}]$ telle que:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^\mu{}_\nu u^\nu$$

Champ électromagnétique en relativité restreinte

- Un peu d'algèbre (tenseur de Faraday):

$$F^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- En EM classique dans le vide:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

- Unifiés avec $A^{\mu} = (\Phi, \vec{A})$
- Rappel: liberté de jauge:

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\psi$$

Champ électromagnétique en relativité restreinte

- Alors:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Équations de Maxwell dans le vide:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ et } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \text{ et } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -4\pi\vec{J} \rightarrow \partial_\rho F_{\mu\nu} = 4\pi J_\rho$$

- Ces équations découlent d'un principe variationnel:

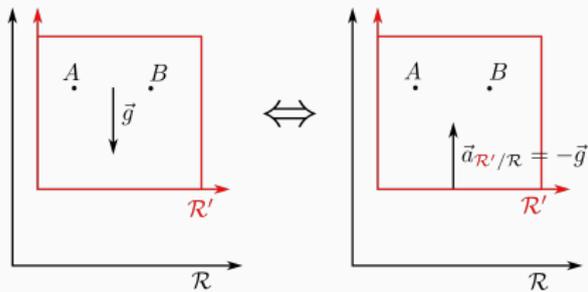
$$S = -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x + S_{\text{sources}}$$

en faisant:

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0$$

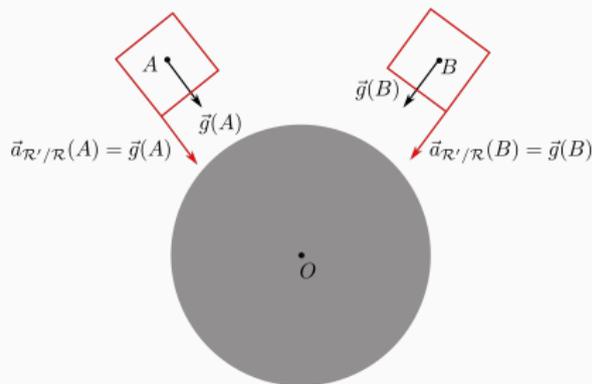
Passer en relativité générale

- Principe d'équivalence: lien entre champ de gravitation et référentiels accélérés, localement.



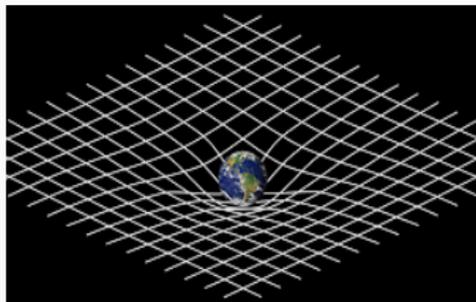
(a)

(b)



- Formuler les lois de la même façon dans tous les référentiels et systèmes de coordonnées.

Passer en relativité générale



Métrique: Longueurs et angles

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

Connection: Transport des vecteurs

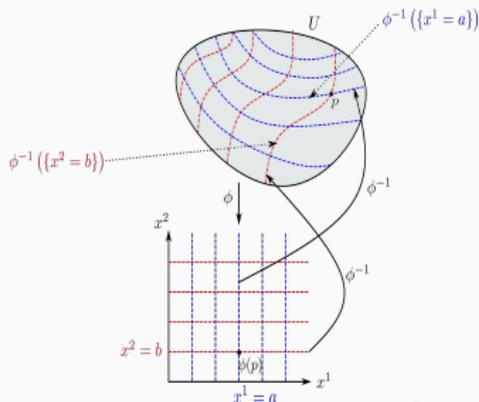
$$\partial_\mu V^\nu \rightarrow \nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho}(x) V^\rho$$

Principe d'équivalence d'Einstein:

En tout point p de l'espace-temps, il existe des coordonnées locales x^μ telles que

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho}(p) \sim \partial g = 0$$



Mais: $\partial\Gamma(p) \neq 0$: Courbure = champ grav

- On applique le principe de correspondance:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}A_{\rho} - \partial_{\nu}A_{\mu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}A_{\rho}\end{aligned}$$

- On applique le principe de correspondance:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\rho} - \partial_{\nu}A_{\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}A_{\rho} \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}\end{aligned}$$

Electromagnétisme en relativité générale

- On applique le principe de correspondance:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\rho} - \partial_{\nu}A_{\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}A_{\rho} \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}\end{aligned}$$

- Et attention (jacobien du changement de coord.):

$$d^4x \rightarrow \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x$$

Electromagnétisme en relativité générale

- On applique le principe de correspondance:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}A_{\rho} - \partial_{\nu}A_{\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}A_{\rho} \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}\end{aligned}$$

- Et attention (jacobien du changement de coord.):

$$d^4x \rightarrow \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x$$

Finalement:

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x$$

Electromagnétisme en relativité générale

Principe variationnel: $F_{\mu\nu} [A + \delta A] = F_{\mu\nu}[A] + \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu$

$$\begin{aligned} S[A + \delta A] &= -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu}[A + \delta A] F^{\mu\nu}[A + \delta A] \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int \{ F_{\mu\nu}[A] F^{\mu\nu}[A] + 2F^{\mu\nu}[A] (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \} \\ &\quad \times \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x \\ &= S[A] - \frac{1}{8\pi} \int F^{\mu\nu}[A] (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x \\ &= S[A] + \frac{1}{8\pi} \int F^{\mu\nu}[A] (\nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu) \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x \\ &= S[A] + \frac{1}{4\pi} \int \nabla_\mu F^{\mu\nu}[A] \delta A^\nu \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x \quad (\text{IPP}) \end{aligned}$$

car $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$.

Electromagnétisme en relativité générale

- Finalement pour toute perturbation δA :

$$\delta S = \frac{1}{4\pi} \int \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} [A] \delta A^{\nu} \sqrt{-\det \mathbf{g}} d^4x = 0$$

Donc:

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0$$

- Et les deux autres équations sont purement géométriques (conséquence des identités de Bianchi pour la courbure):

$$\nabla_{\mu} F_{\nu\rho} + \nabla_{\nu} F_{\rho\mu} + \nabla_{\rho} F_{\mu\nu} = 0$$

Electromagnétisme en relativité générale

- En termes du potentiel:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} [\nabla_{\rho} A_{\sigma} - \nabla_{\sigma} A_{\rho}] .$$

- Donc:

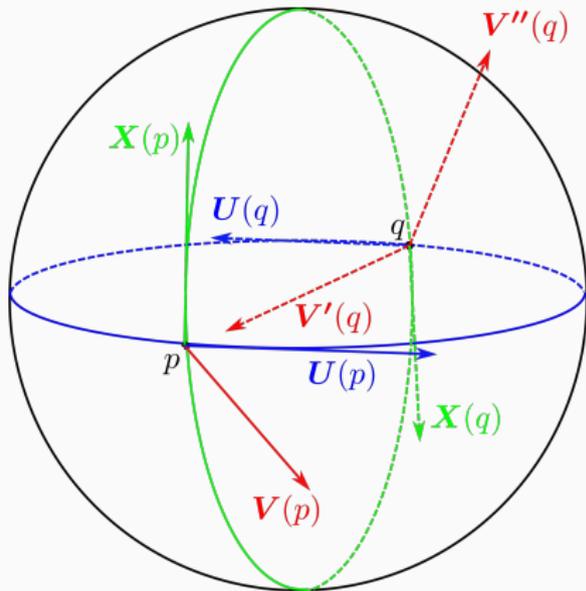
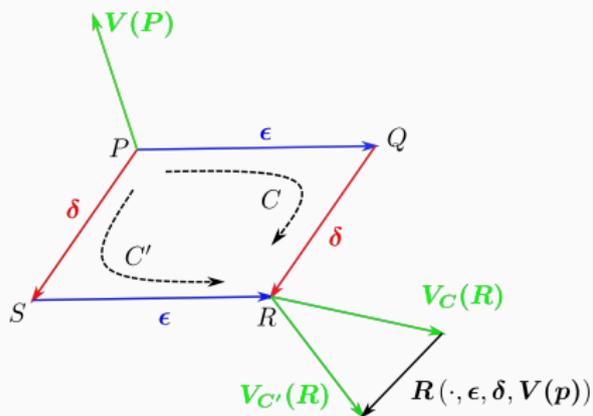
$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} [\nabla_{\mu} \nabla_{\rho} A_{\sigma} - \nabla_{\mu} \nabla_{\sigma} A_{\rho}] \\ &= \nabla^{\mu} \nabla_{\mu} A^{\nu} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \nabla_{\mu} \nabla_{\sigma} A_{\rho} \\ &= \square A^{\nu} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \nabla_{\mu} \nabla_{\sigma} A_{\rho} \end{aligned}$$

Electromagnétisme en relativité générale

- Courbure de Riemann (Déf.):

$$R^{\rho}{}_{\alpha\mu\sigma}A^{\alpha} = \nabla_{\mu}\nabla_{\sigma}A^{\rho} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\mu}A^{\rho}$$

- Inéquivalence du transport de vecteur suivant deux directions infinitésimales



Electromagnétisme en relativité générale

- Finalement:

$$\square A^\nu - R^\mu{}_{\rho\mu}{}^\nu A^\rho = \nabla^\nu \nabla_\mu A^\mu .$$

- On introduit la **courbure de Ricci**:

$$R_{\rho\nu} = R^\mu{}_{\rho\mu\nu} .$$

- Et on choisit la **jauge de Lorentz**:

$$\nabla_\mu A^\mu = 0 .$$

- Donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \square A^\nu - R^\nu{}_{\mu} A^\mu = 0 \\ \nabla_\mu A^\mu = 0 \end{array} \right.$$

Champs électriques et magnétiques

- Champs électriques et magnétiques définis par rapport à une famille d'observateurs eux-mêmes caractérisés par leur 4-vitesse U^μ :

$$E_\mu = F_{\mu\nu} U^\nu$$

$$B_\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} U^\nu F^{\rho\sigma} .$$

- Trivialement:

$$E_\mu U^\mu = B_\mu U^\mu = 0$$

Approximation eikonale

- Onde EM monochromatique de faible longueur d'onde λ .
- Deux échelles caractéristiques:
 - L : distance typique de variation de la fréquence, de l'amplitude et de la polarisation de l'onde;
 - L_c : distance caractéristique de variation du champ gravitationnel:

$$R^\mu{}_\nu \propto (\partial g)^2 \propto L_c^{-2}$$

- Hypothèse de l'optique géométrique:

$$\lambda \ll L \text{ et } \lambda \ll L_c.$$

- Paramètre de comptage des ordres de grandeur:

$$\epsilon = \frac{\lambda}{\min\{L, L_c\}}.$$

Approximation eikonale

- Alors: $R^\mu{}_\nu \rightarrow \epsilon^2 R^\mu{}_\nu$

- Solution d'onde: $A^\mu = \left[\underbrace{a^\mu}_{\text{Opt.gom.}} + \underbrace{\epsilon b^\mu + \epsilon^2 c^\mu + \dots}_{\text{Corrections}} \right] e^{i\frac{S}{\epsilon}}$

- $S(x^\mu) \in \mathbb{R}$: phase variant rapidement. On introduit un **4-vecteur d'onde** d'ordre $1/\epsilon$:

$$k_\mu = \partial_\mu S .$$

- Hypersurfaces $S(x^\mu) = \text{cste}$ sont **$\mathbf{g}^- \perp$ à \mathbf{k}** .

- $a_\mu(x^\mu), b_\mu(x^\mu), c_\mu(x^\mu) \in \mathbb{C}$: amplitudes variant lentement.

- Ordres $1/\epsilon^2$ et $1/\epsilon$: optique géométrique

- Ordre ϵ^0 : corrections dominantes

Approximation eikonale

$$\nabla_{\mu} A^{\mu} = 0 \Rightarrow i \frac{1}{\epsilon} k_{\mu} a^{\mu} + \nabla_{\mu} a^{\mu} + i k_{\mu} b^{\mu} = 0$$

- Ordre $1/\epsilon$:

$$k_{\mu} a^{\mu} = 0 .$$

Amplitude toujours \perp à \mathbf{k} , i.e. tangente à hypersurf.

$S(x^{\mu}) = \text{cste}$: onde transverse

- Ordre ϵ^0 :

$$k_{\mu} b^{\mu} = i \nabla_{\mu} a^{\mu} .$$

Approximation eikonale

$$\square A^\nu - R^\nu{}_\mu A^\mu = 0$$

- Ordre $1/\epsilon^2$: $k_\nu k^\nu a^\mu = 0$. Comme on veut $a^\mu \neq 0$:

$$k_\mu k^\mu = 0 . \text{ Vecteur d'onde de genre lumière.}$$

- Ordre $1/\epsilon$: $-k_\nu k^\nu b^\mu + i[\nabla_\nu k^\nu a^\mu + 2k^\nu \nabla_\nu a^\mu] = 0$. Donc on a une équation de propagation pour a^μ :

$$k^\nu \nabla_\nu a^\mu = -\frac{1}{2} \nabla_\nu k^\nu a^\mu .$$

- Ordre ϵ^0 :

$$2ik^\nu \nabla_\nu b^\mu = -\square a^\mu .$$

Approximation eikonale

- La relation $k_\mu k^\mu = 0$ donne l'équation eikonale relativiste:

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{S} \partial_\nu \mathcal{S} = 0 .$$

- De plus:

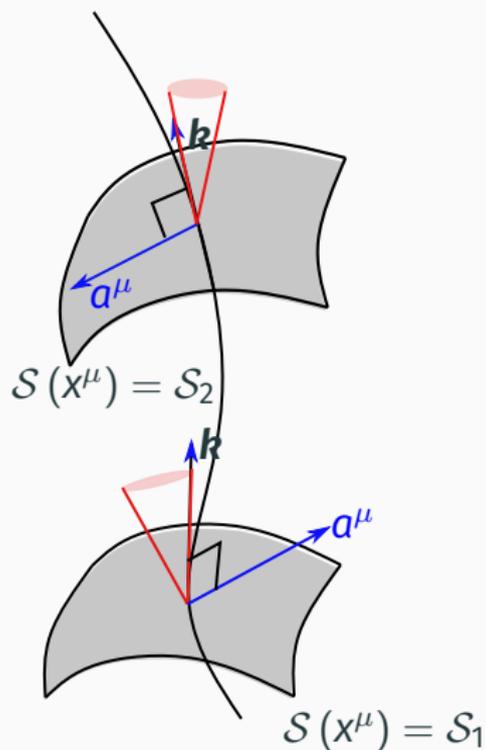
$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu (k_\nu k^\nu) = 2k^\nu \nabla_\mu k_\nu \\ &= 2k^\nu \nabla_\mu \partial_\nu \mathcal{S} = 2k^\nu [\partial_\mu \partial_\nu \mathcal{S} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} k_\rho] \\ &= 2k^\nu \nabla_\mu \partial_\nu \mathcal{S} = 2k^\nu [\partial_\nu \partial_\mu \mathcal{S} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} k_\rho] \\ &= 2k^\nu \nabla_\nu k_\mu \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\mathbf{k}^\mu \nabla_\nu \mathbf{k}^\mu = 0 .$$

- \mathbf{k} transporté parallèlement le long de lui-même: courbes géodésiques

Rayons lumineux



Rayons lumineux:

Géodésiques ($k^\nu \nabla_\nu k^\mu = 0$)
de genre lumière:

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{dv}$$

tel que $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$

Décomposition: $a^\mu = af^\mu$
Polarisation f^ν :

$$k^\nu \nabla_\nu f^\nu = 0$$

Conservation du nombre de photons

- $k^\nu \nabla_\nu a^\mu = -\frac{1}{2} \nabla_\nu k^\nu a^\mu$ avec $a^\mu = a f^\mu$ tel que:

$$a^\mu a_\mu = a^2 \text{ et } f^\mu f_\mu = 1 .$$

Alors: $k^\mu \partial_\mu a = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu k^\mu) a$ and $k^\mu \nabla_\mu f^\nu = 0$.

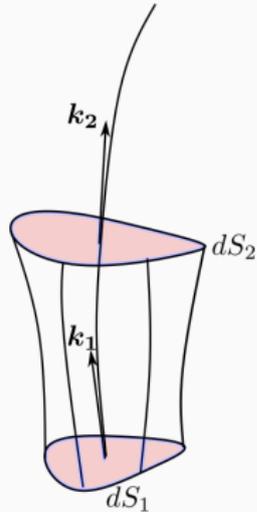
- On obtient:

$$\nabla_\nu (a^2 k^\nu) = 0 .$$

- Analyse énergétique:

$$a = \sqrt{8\pi\hbar} \sqrt{\frac{n_\gamma}{E_\gamma}}$$

- Dans un faisceau, le nombre de photons est conservé.

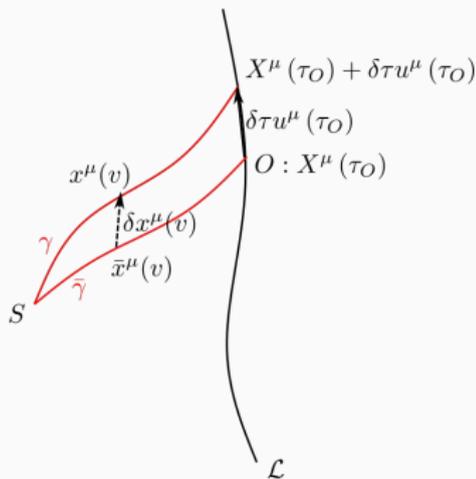


$$a_1^2 dS_1 = a_2^2 dS_2$$

Principe de Fermat

Soit une courbe de genre lumière $\bar{\gamma}$ qui connecte la source S à la ligne d'univers \mathcal{L} d'un observateur. Soit O le point d'intersection de $\bar{\gamma}$ et \mathcal{L} . Soit τ le temps propre le long de \mathcal{L} et τ_0 celui de O .

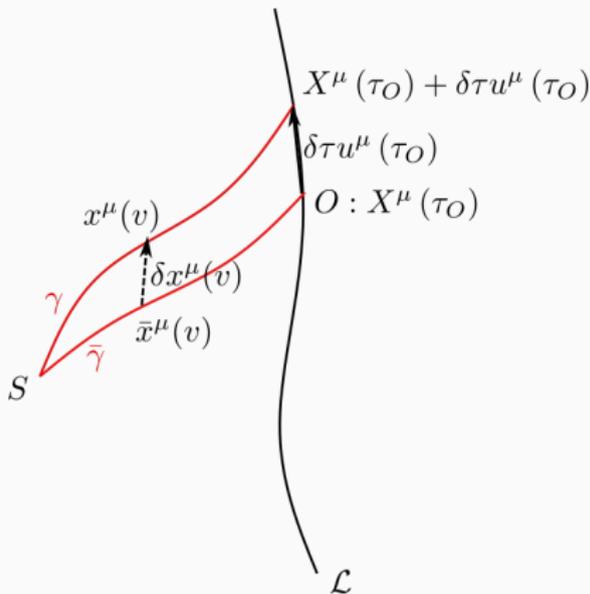
$\bar{\gamma}$ est une géodésique de genre lumière (donc un rayon lumineux) si et seulement si τ est un extremum des temps propres d'arrivée de toutes les courbes de genre lumière connectant S à \mathcal{L} dans un voisinage de $\bar{\gamma}$.



Principe de Fermat: preuve

- Tout d'abord: $\bar{k}^\mu = \frac{d\bar{x}^\mu}{dv}$ et $k^\mu = \frac{dx^\mu}{dv}$.
- Ensuite: $\delta X_S = 0$ et $\delta x_O^\mu = \delta \tau u_O^\mu$.
- Finalement:
 $k^\nu \nabla_\nu \delta x^\mu = k^\mu - \bar{k}^\mu = \delta k^\mu$
de sorte que:

$$k^\mu k_\mu = 2\bar{k}^\mu \delta k_\mu = 0 .$$



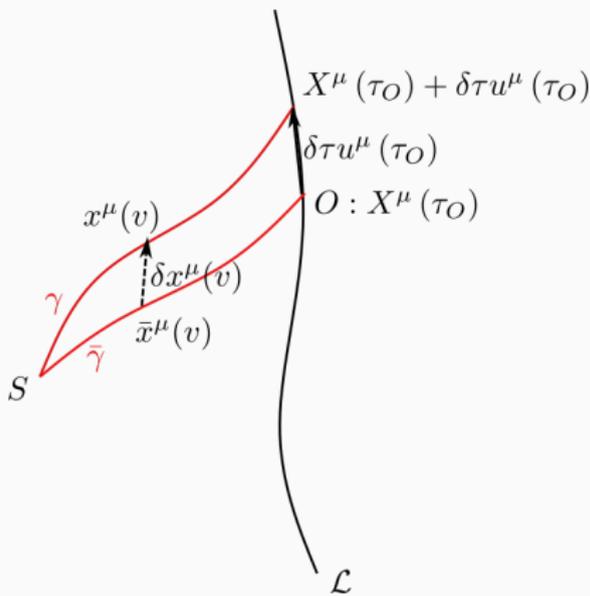
Principe de Fermat: preuve

$$\bar{\gamma} \text{ géodésique} \Rightarrow \delta\tau = 0$$

- On a: $k^\nu \partial_\nu (\bar{k}_\mu \delta x^\mu) = k^\mu \nabla_\mu \bar{k}_\mu \delta x^\mu + \bar{k}^\mu \delta k_\mu = 0$.
- Donc $\bar{k}_\mu \delta x^\mu$ est constant le long de $\bar{\gamma}$. Avec $\delta x_S = 0$ cela implique que c'est nul partout. En particulier à O :

$$(\bar{k}_\mu \delta x^\mu)_O = (\bar{k}^\mu u_\mu)_O \delta\tau .$$

- Ainsi: $\delta\tau = 0$.



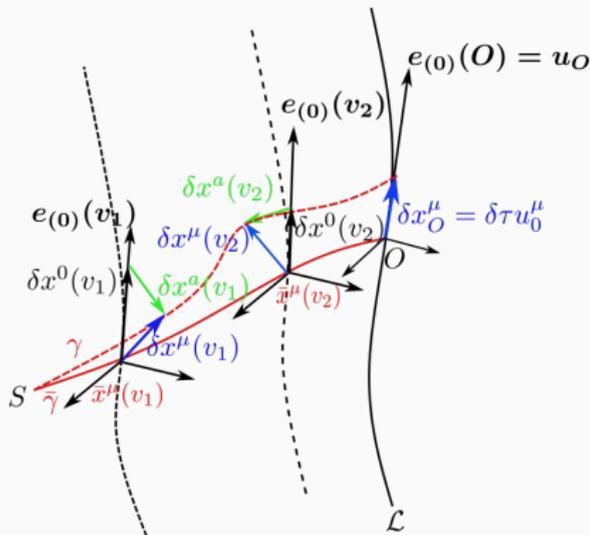
Principe de Fermat: preuve

- La courbe γ interpolant les point $\bar{x}^\mu(v) + \delta x^{n\mu}(v)$ est donc de genre lumière.
- Dans les tétrades, on a:
 $\bar{k}^0 \delta k_0 \delta k_0 + \bar{k}^a \delta k_a = 0$. Soit:

$$d\delta x^0 = -\frac{\bar{k}_a}{\bar{k}_0} \frac{d\delta x^a}{dv}.$$

- En intégrant entre S et O:

$$\begin{aligned} \delta\tau = \delta x^0_O &= \int_S^O \frac{\bar{k}_a}{\bar{k}_0} \frac{d\delta x^a}{dv} \\ &= - \int_S^O \frac{d}{dv} \left(\frac{\bar{k}_a}{\bar{k}_0} \right) \delta x^a. \end{aligned}$$



Principe de Fermat: preuve

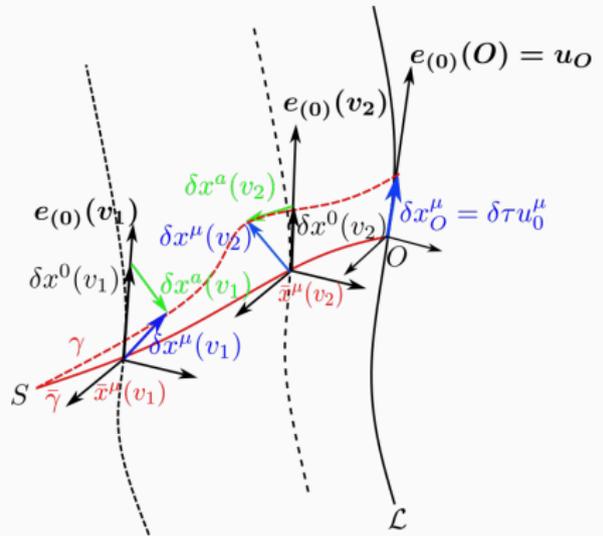
- Puisque $\delta\tau = 0$ et $\delta x^a(v)$ est arbitraire:

$$\frac{d}{dv} \begin{pmatrix} \bar{k}_a \\ \bar{k}_0 \end{pmatrix} = 0$$

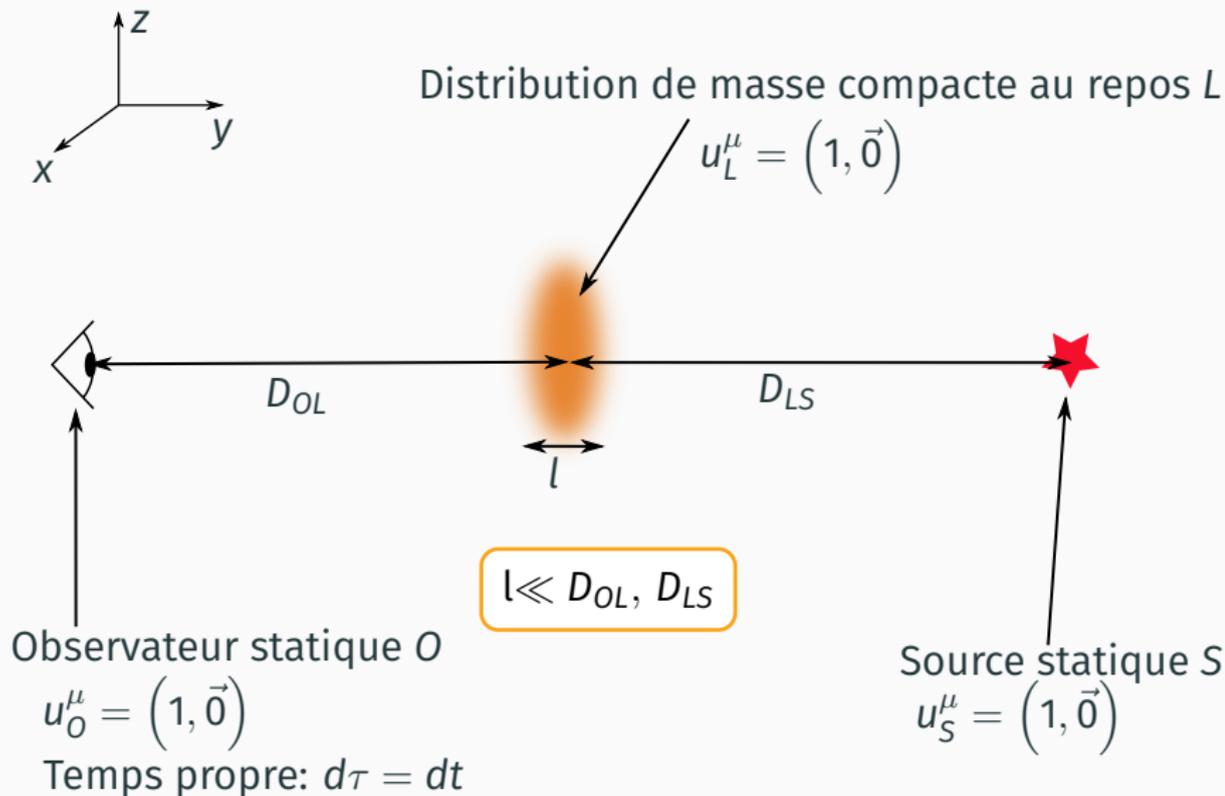
- $\bar{k}_\alpha = \bar{k}_\mu e^\mu{}_\alpha$.
- Soit w tel que $dw = \bar{k}_0 dv$ et $\bar{K}^\mu = \frac{d\bar{x}^\mu}{dw}$. Alors:

$$\bar{K}^\nu \nabla_\nu \bar{K}^\mu = 0.$$

- $\bar{\gamma}$ est donc une géodésique.



Application: lentillage gravitationnel



Application: lentillage gravitationnel

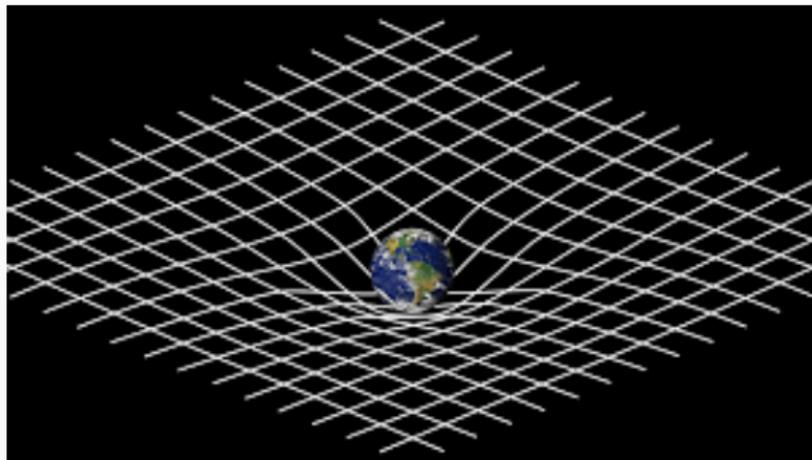
- Géométrie générée par L :

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) [dx^2 + dy^2 + dz^2] ,$$

avec $|\Phi| \ll 1$.

- Φ est le potentiel newtonien:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$



Application: lentillage gravitationnel

- Courbe de genre lumière entre S et O:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 - 2\Phi) [dx^2 + dy^2 + dz^2] = 0$$

- Soit:

$$dt = (1 - 2\Phi) \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} .$$

- Temps coord. écoulé entre émission et réception:

$$t_O - t_S = \int_S^O (1 - 2\Phi) \sqrt{\delta_{ij} k^i k^j} d\lambda \text{ avec } k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

- Temps propre le long de ligne d'U. de O:

$$\tau - \tau_e = \int_S^O (1 - 2\Phi) \sqrt{\delta_{ij} k^i k^j} d\lambda$$

Application: lentillage gravitationnel

- Remarque: analogie avec indice de réfraction:

$$t_O - t_S = \int_S^O \underbrace{(1 - 2\Phi)}_{=n(x,y,z)} dl$$

- Principe de Fermat: Courbe est un rayon lumineux ssi:

$$\delta\tau = \delta \int_S^O (1 - 2\Phi) \sqrt{\delta_{ij} k^i k^j} d\lambda = 0$$

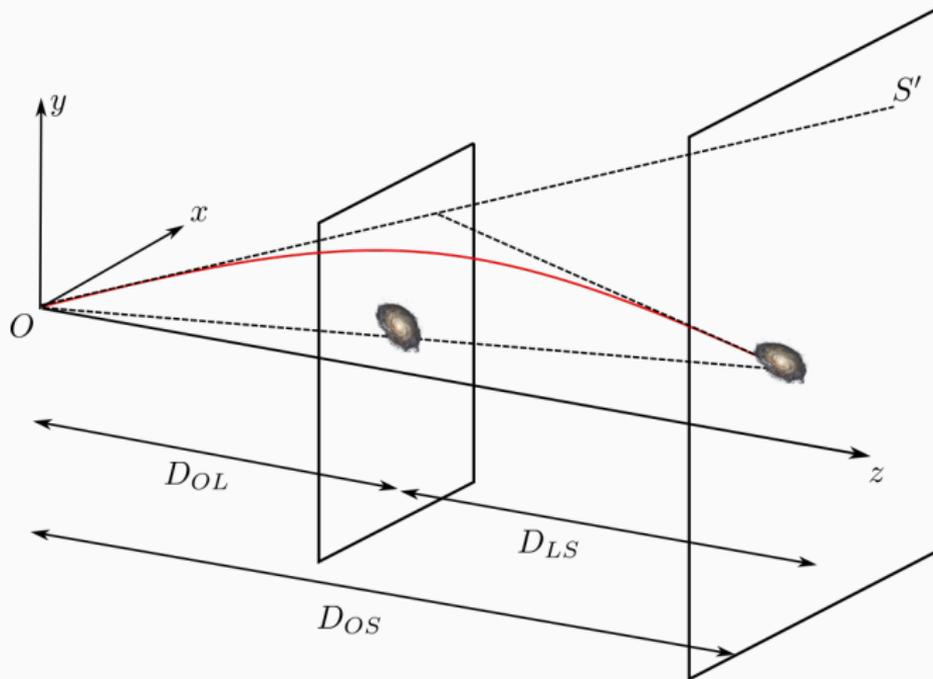
- Équation d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dl} \left[(1 - 2\Phi) \delta_{ij} \frac{dx^i}{dl} \right] = -2\partial_i \Phi \Leftrightarrow \frac{d}{dl} \left[n \frac{d\vec{r}}{dl} \right] = \vec{\nabla} n$$

- Champ grav. (faible) = milieu réfringent isotrope.

Application: lentillage gravitationnel

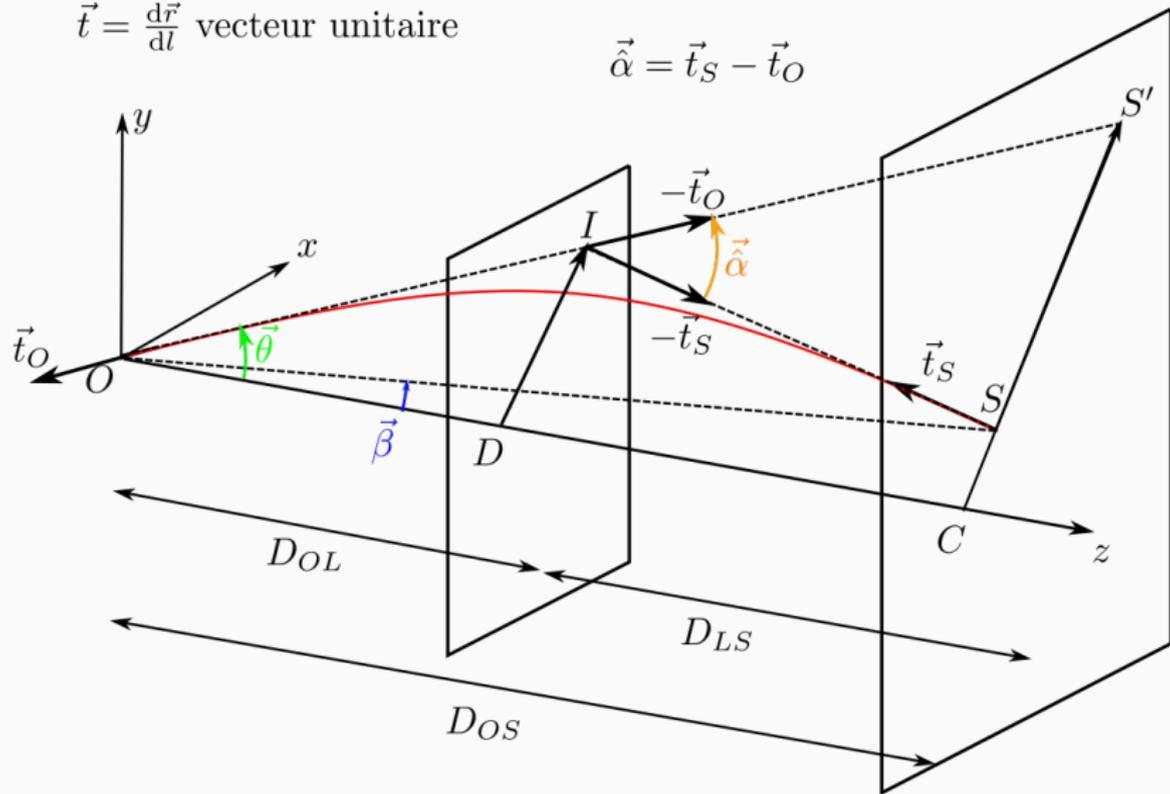
- Approximation de la **lentille mince**
- Faible déviation: **petits angles**



Application: lentillage gravitationnel

$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dl}$ vecteur unitaire

$$\vec{\alpha} = \vec{t}_S - \vec{t}_O$$



Application: lentillage gravitationnel

- On développe $\frac{d}{dl} \left[(1 - 2\Phi) \delta_{ij} \frac{dx^i}{dl} \right] = -2\partial_i \Phi$.

- On obtient:

$$\frac{d\vec{t}}{dl} = 2 \frac{d\Phi}{dl} \vec{t} - 2\vec{\nabla}\Phi$$

- On remarque que:

$$\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{dl} = 0 \text{ car } \vec{t} \cdot \vec{t} = 1.$$

- Donc: $\vec{t} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \frac{d\Phi}{dl}$.

- Et:

$$\frac{d\vec{t}}{dl} = 2 \left(\vec{t} \cdot \vec{\nabla}\Phi \right) \vec{t} - 2\vec{\nabla}\Phi.$$

Application: lentillage gravitationnel

- En développant $\vec{\nabla}\Phi = a\vec{t} + b\vec{u}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{t} = 0$, on trouve:

$$\vec{\nabla}\Phi = (\vec{t} \cdot \vec{\nabla}\Phi) \vec{t} + \vec{\nabla}_{\perp}\Phi.$$

- $\vec{\nabla}_{\perp}\Phi$ partie du gradient \perp direction de propagation de la lumière.
- Donc:

$$\frac{d\vec{t}}{dl} = -2\vec{\nabla}_{\perp}\Phi$$

- En intégrant de S à O :

$$\vec{\alpha} = 2 \int_S^O \vec{\nabla}_{\perp}\Phi dl$$

Application: lentillage gravitationnel

- À partir de $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$:

$$\Phi(x, y, z) = \int \frac{-G}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \rho(x', y', z') dx' dy' dz' .$$

- Donc ($\vec{t} \simeq \vec{e}_z$ à l'ordre ϕ^0):

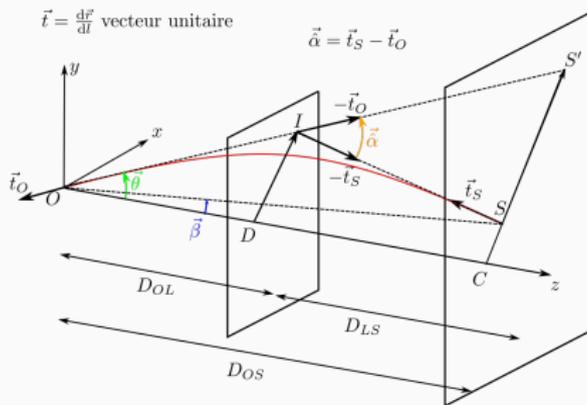
$$\vec{\nabla}_{\perp} \Phi = G \int \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\vec{\xi}', z') d^2\xi' dz' ,$$

où $\xi = (x, y)$.

- Densité surfacique: $\Sigma(x', y') = \int \rho(x', y', z') dz'$.
- Alors:

$$\vec{\alpha} = 4G \int \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{\|\vec{\xi} - \vec{\xi}'\|^2} \Sigma(\vec{\xi}') d^2\xi'$$

Application: lentillage gravitationnel



Équation des lentilles: $\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \vec{\hat{\alpha}}(\vec{\theta})$.

Plusieurs solutions.

Délais temporelles:

$$\tau(\vec{\theta}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2} \|\vec{\theta} - \vec{\beta}\|^2 - \hat{\psi}(\vec{\theta})$$

Application: lentillage gravitationnel

- Formule du délai temporel.
- Remarquons que:

$$\vec{\alpha} = 4G \int \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{\|\vec{\xi} - \vec{\xi}'\|^2} \Sigma(\vec{\xi}') d^2\xi' = \vec{\nabla}_\perp \hat{\psi}(\vec{\xi})$$

avec $\Delta_\perp \hat{\psi} = 4\pi G \Sigma$.

- Alors, équation des lentilles:

$$\nabla_{\vec{\theta}} \left[\frac{1}{2} \|\vec{\theta} - \vec{\beta}\|^2 - \underbrace{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \hat{\psi}(D_{OL}\theta)}_{=\psi(\theta)} \right] = 0$$

Application: lentillage gravitationnel

- Soit le **potentiel de Fermat**:

$$\tau(\vec{\beta}, \vec{\theta}) = \frac{c^{-1} D_{OS} D_{OL}}{D_{LS}} \left[\|\vec{\theta} - \vec{\beta}\|^2 - \psi(\theta) \right]$$

- C'est le délai temporel entre trajet de la lumière et trajet sans lentille.
- Déjà: Équation des lentilles:

$$\nabla_{\vec{\theta}} \tau = \vec{0}$$

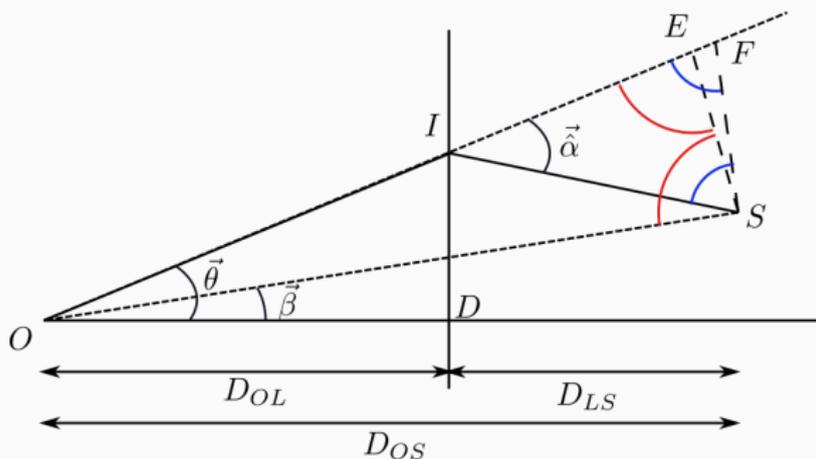
Application: lentillage gravitationnel

- Temps de parcours:

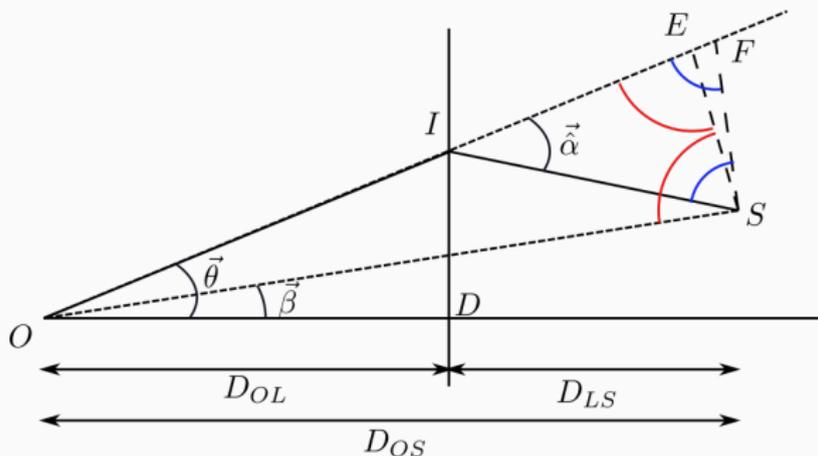
$$t_o - t_s = \int_S^O (1 - 2\Phi) dl .$$

- Délai géométrique / sans lentille:

$$\delta t_{\text{géom}} = \int_S^O dl - OS$$



Application: lentillage gravitationnel



- $OE = OS$ et $IF = IS$ donc $c^{-1}EF = \delta t_{\text{géom}}$
- $\widehat{OES} = \widehat{OSE} = \gamma$ et $\widehat{IFS} = \widehat{ISF} = \lambda$
- $\delta = \lambda - \gamma = \frac{\hat{\alpha} - (\theta - \beta)}{2} = \frac{D_{OL}\hat{\alpha}}{2D_{OS}}$
- $EF = SF\delta = \hat{\alpha}D_{LS}\delta = \frac{D_{LS}D_{OL}}{2D_{OS}} \|\vec{\hat{\alpha}}\|^2 = \frac{D_{LS}D_{OL}}{2D_{OS}} \|\vec{\theta} - \vec{\beta}\|^2.$

Application: lentillage gravitationnel

- D'un autre côté:

$$\delta t_{\text{grav}} = -2 \int \Phi dl \simeq -2 \int \Phi dz = -2\psi = -2 \frac{D_{OS} D_{OL}}{D_{LS}} \hat{\psi} .$$

- Donc le délai temporel pour image en θ par rapport à sans lentillage:

$$\delta t = \tau(\vec{\beta}, \vec{\theta}) = \frac{c^{-1} D_{OS} D_{OL}}{D_{LS}} \left[\|\vec{\theta} - \vec{\beta}\|^2 - \psi(\theta) \right] .$$

- Entre deux images:

$$\delta t_{12} = \tau(\vec{\beta}, \vec{\theta}_2) - \tau(\vec{\beta}, \vec{\theta}_1) .$$

